ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Учебное пособие
для студентов экономических специальностей

Москва 2004

Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике.
М.: ГУ-ВШЭ, 2004. – 31 с.

Сборник включает в себя основные типы задач, с которыми сталкиваются студенты в процессе изучения курса "Теория вероятностей и математическая статистика".

Предназначен для студентов экономических специальностей.

Составители: Т.А.Ратникова, А.С.Шведов

Задание 1

Множества и функции

$A \cap B$ – пересечение множеств A и B;

$A \cup B$ – объединение множеств A и B;

$A \setminus B$ – разность множеств A и B;

$A \Delta B$ – симметрическая разность множеств A и B, по определению $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

$\overline{A}$ – дополнение множества A до некоторого большего множества;

$\varnothing$ – пустое множество.

1.1. Множество B является подмножеством множества A. Чему равны их пересечение и объединение?

1.2. Множество A состоит из целых чисел, делящихся на 4, множество B – из целых чисел, делящихся на 10, множество C – из целых чисел, делящихся на 175. Из каких чисел состоит множество $A \cap B \cap C$.

1.3. Множество A состоит из точек плоскости, для которых $|x| \le 4$, $|y| \le 4$. Множество B состоит из точек плоскости, для которых $x^2 + y^2 \le 25$. Изобразить $A \cap B$.

1.4. Доказать, что: $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subset (A \cup B) \cap (C \cup D)$.

1.5. При каких условиях выполнено равенство: $A \cap B = A \cup B$?

1.6. Доказать, что $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

1.7. Доказать, что: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

1.8. Доказать, что: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1.9. Доказать, что: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

1.10. Доказать, что: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

1.11. Верно ли, что если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$?

1.12. Множество М состоит из 100 элементов. Подмножество А множества М состоит из элементов, обладающих свойством 1. и содержит 70 элементов, подмножество В состоит из элементов, обладающих свойством 2, и содержит 75 элементов, подмножество С состоит из элементов, обладающих свойством 3, и содержит 80 элементов, подмножество D состоит из элементов, обладающих свойством 4, и содержит 85 элементов. Каким может быть минимальное число элементов, обладающих одновременно свойством 1, свойством 2, свойством 3 и свойством 4?

1.13. Доказать, что $A \setminus B \subset (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$.

1.14. Установить взаимно-однозначное соответствие между точками интервалов $(0,1)$ и $(1,\infty)$.

1.15. Установить взаимно-однозначное соответствие между точками интервала (-1,1) и множеством $\boldsymbol{R}$.

1.16. Установить взаимно-однозначное соответствие между точками плоскости и точками сферы, из которой выброшена одна точка.

1.17. Доказать, что $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$.

1.18. Доказать, что $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$.

Задание 2

Пространства элементарных событий, вероятность события, независимость событий

Для любых событий A и B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

События A и B независимы, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$\overline{A} = \Omega \setminus A$ – отрицание события A.

2.1. Если событие A является следствием события B, то чему равно событие $A \cap B$?

2.2. В каком случае несовместимые события могут быть независимыми?

2.3. Доказать, что события A, $\overline{A} \cap B$ и $\overline{A \cup B}$ попарно не пересекаются и при объединении дают все пространство элементарных событий Ω.

2.4. Прибор состоит из 2 блоков первого типа и 3 блоков второго типа. Событие A_i состоит в том, что i - й блок первого типа исправен $(i = 1,2)$; событие B_j – в том, что исправен j - й блок второго типа $(j = 1,2,3)$. Прибор работает, если исправен хотя бы один блок первого типа и хотя бы два блока второго типа. Событие D состоит в том, что прибор работает. Выразить D и $\overline{D}$ через события $A_i, \overline{A}_i, B_j, \overline{B}_j$.

2.5. Судно имеет рулевое устройство, 4 котла и 2 турбины. Событие A означает исправность рулевого устройства, событие B_i – исправность i - го котла, событие C_j – исправность j - ой турбины. Событие D, состоящее в том, что судно управляемо, имеет место в том случае, когда исправны рулевое устройство, хотя бы один котел и хотя бы одна турбина. Выразить события D и $\overline{D}$ через $A, \overline{A}, B_i, \overline{B}_i, C_j, \overline{C}_j$.

2.6. Брошены последовательно 3 монеты. Определить, зависимы или независимы события:

A = {выпадение "герба" на первой монете};

B = {выпадения хотя бы одной "решетки"}.

2.7. Доказать, что если A и B независимые события с положительными вероятностями, то $A \cap B \neq \varnothing$.

2.8. Среди 60 лотерейных билетов 12 выигрышных. В случае, если при первой попытке играющий вытащил невыигрышный билет, ему разрешается взять еще один. Какова вероятность получить выигрышный билет?

2.9. В урне имеется 20 шаров: 6 белых и 14 красных. Из урны наугад вынимается 1 шар. Какова вероятность того, что этот шар: а) белый; б) красный.

2.10. Бросают игральную кость. Какова вероятность выпадения номера 3 на верхней грани, упавшей на стол кости? Какова вероятность выпадения номера, меньшего 3?

2.11. Игральная кость бросается 2 раза. Найти вероятность того, что оба раза выпадет одинаковое число очков.

2.12. События A, B, C удовлетворяют трем условиям:

1) $P\{A\} = P\{B\} = P\{C\} = p$,

2) A, B, C попарно независимы,

3) $A \cap B \cap C = \varnothing$.

Вычислить p, если вероятность $A \cup B \cup C$ равна 3/4.

2.13. Из слова **ВЕЛИЧИНА** выбирается случайным образом одна буква. Какова вероятность того, что это окажется буква **И**? Какова вероятность того, что это окажется гласная буква?

2.14. Найти вероятность того, что при бросании 3 монет выпадут 2 "решетки"?

2.15. При проведении физического опыта в 70% случаев был получен положительный результат. Сколько всего было проведено опытов, если отрицательных результатов было 9?

2.16. Пусть
1) события A и B_1 независимы;
2) события A и B_2 независимы;
3) $B_1 \cap B_2 = \varnothing$.

Доказать, что события A и $B_1 \cup B_2$ независимы. Привести пример, показывающий, что условие $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ является необходимым.

2.17. Доказать, что если события A и B независимы, то и события A и $\bar{B}$ независимы.

Задание 3

Математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение случайной величины. Ковариация и корреляция случайных величин

Математическое ожидание случайной величины X обозначается $E(X)$. Для дискретной случайной величины X

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} X(\omega_i) p_i .$$

Дисперсия случайной величины X определяется как $D(X) = E((X - E(X))^2)$.

Стандартное отклонение случайной величины X определяется как корень квадратный из дисперсии этой случайной величины, $\sigma_X = \sqrt{D(X)}$.

Ковариация случайных величин X и Y

$$Cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

Корреляция случайных величин X и Y

$$Cor(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

3.1. Случайная величина X принимает значения -2, -1, 0, 1, 2 со следующими вероятностями: 0.3, 0.1, 0.4, 0.0, 0.2. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

3.2. В лотерее разыгрываются: автомобиль стоимостью 10 000 долл., телевизор стоимостью 1000 долл. и видеомагнитофон стоимостью 200 долл.. Найти математическое ожидание выигрыша на 1 билет, если общее число билетов равно 100.

3.3. Снайпер стреляет по замаскированному противнику до первого попадания. Вероятность промаха при отдельном выстреле равна p. Найти математическое ожидание числа промахов.

3.4. В ходе сдачи экзамена группой из 30 студентов получены следующие результаты: оценка "2" выставлена одному студенту, "3" – двум студентам, "4" – 8 студентам и "5" – 19 студентам. Найти математическое ожидание и дисперсию оценки, полученной этой группой.

3.5. Доказать утверждение: $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

3.6. Доказать утверждение для независимых случайных величин X и Y: $D(Y - X) = D(Y) + D(X)$.

3.7. Найти математическое ожидание и дисперсию числа очков, выпадающих при бросании игральной кости; числа очков, выпадающих при бросании n игральных костей.

3.8. Показать, что для любого числа c:

$$E(X - c)^2 \geq E(X - E(X))^2 = D(X).$$

3.9. Показать, что следующие утверждения равносильны (предполагается, что $D(X)>0$, $D(Y)>0$):
1) для некоторых чисел a и b, $a \neq 0$: $Y = aX + b$,
2) $Cor(X,Y) = 1$ или -1.

3.10. Как изменится математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение случайной величины X, если ее умножить на число c?

3.11. Как изменится математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение случайной величины X, если к ней прибавить число c?

3.12. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X равны, соответственно, 3 и 8. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $2X+4$.

3.13. Доказать, что дисперсия числа появлений успеха при однократном проведении опыта не превосходит 1/4.

3.14. Пусть случайная величина Y представлена в виде:

$$Y = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n,$$

где $X_1, \ldots, X_n$ – случайные величины, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – числа. Доказать, что

$$D(Y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 D(X_i) + 2\sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j Cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j Cov(X_i, X_j).$$

(При доказательстве использовать теорему:

$$D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2) + 2Cov(X_1, X_2)).$$

3.15. Ниже приведены прибыли на один вложенный доллар по двум видам ценных бумаг за 6 лет.

X_1	-0,05	-0,04	0,08	0,06	0,04	0,06
X_2	0,0	-0,04	0,0	0,1	0,05	0,1

Найти $Cov(X_1, X_2)$.

3.16. Портфель состоит на 10% из ценных бумаг вида 1, на 40% из ценных бумаг вида 2, на 30% из ценных бумаг вида 3, на 20% из ценных бумаг вида 4. Исходя из следующей таблицы определить дисперсию для прибыли портфеля на один вложенный доллар:

	Доля ц.б.	*Cov* с ц.б. 1	Коэфф. ×*Cov*	*Cov* с ц.б. 2	Коэфф. ×*Cov*	*Cov* с ц.б. 3	Коэфф. ×*Cov*	*Cov* с ц.б. 4	Коэфф. ×*Cov*
ц. б. 1	0,10	,025	,0025	,03	,003	,0025	,00025	,01	,001
ц. б. 2	0,40	,03	,012	,045	,018	,0075	,003	,015	,006
ц. б. 3	0,30	,0025	,00075	,0075	,00225	,0125	,00375	-,0025	-,00075
ц. б. 4	0,20	,01	,002	,015	,0030	-,0025	-,0005	,0075	,0015
$\sum$			,01725		,02625		,00650		,00775
Коэфф.			,10		,40		,30		,20
Коэфф.×$\sum$			,001725		,0104		,00195		,00155

3.17. Предположим, что мы хотим добавить в портфель, состоящий из 99 ценных бумаг в качестве сотой ценной бумаги либо A, либо B. Доля каждой ценной бумаги в портфеле будет 0,01. Каждая из 99 ценных бумаг, уже входящих в портфель, имеет дисперсию V для прибыли на 1 вложенный доллар и корреляция прибылей для каждой пары равна 1/2 (т.е. ковариация равна 1/2 V). Ценная бумага A также имеет дисперсию V и корреляцию 1/2 со всеми ценными бумагами из портфеля. Ценная бумага B является высокоспекулятивной. Для нее дисперсия прибыли равна 25 V и корреляция со всеми остальными ценными бумагами равна 0 (возможно потому, что прибыль зависит от субъективных факторов, а не от общего состояния рынка). Добавление какой ценной бумаги A или B позволит сформировать портфель с меньшей дисперсией?

3.18. Случайная величина X может принимать значения -1 и 1; случайная величина Y может принимать значения -1, 0 и 1. Вероятности событий $(X = a) \cap (Y = b)$ для различных значений a и b приведены в следующей таблице.

Y \ *X*:	−1	1
−1	0,2	0,1
0	0,3	0,0
1	0,1	0,3

Найти $E(X)$, $E(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $Cov(X,Y)$.

Задание 4

Функции распределения и функции плотности случайных величин

Для любой случайной величины X функция распределения F задается соотношением $F(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\})$ при $-\infty < x < \infty$.

Для непрерывной случайной величины X функция плотности определяется как производная функции распределения: $f(x) = F'(x)$.

По формуле Ньютона - Лейбница

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(u)du,$$

в частности, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$. Для непрерывной случайной величины X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} u f(u)du, \qquad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (u - E(X))^2 f(u)du.$$

4.1. По мишени производится два выстрела, случайная величина X означает число попаданий в мишень. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0.6. Построить функцию распределения $F(x)$ случайной величины X и найти $E(X)$ и $D(X)$.

4.2. В урне 5 белых и 15 красных шаров. Вынули 1 шар. Случайная величина X – число вынутых красных шаров. Построить функцию распределения $F(x)$ случайной величины X.

4.3. Бросают 4 монеты. Построить функцию распределения $F(x)$ случайной величины X, равной числу выпавших “гербов”. Вероятность выпадания “герба” равна 1/2.

4.4. Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<1 \\ (x-1)^2 & \text{при} \quad 1 \le x \le 2 \\ 1 & \text{при} \quad x>2 \end{cases}$$

Найти функцию плотности $f(x)$ случайной величины X и определить вероятность того, что случайная величина X принимает значения из интервала (1,5; 2,5).

4.5. Дана функция распределения случайной величины X

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$$

Найти функцию плотности $f(x)$ этой случайной величины и $E(X)$.

4.6. Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = A + B\, arctg\, x \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Найти постоянные A и B; функцию плотности $f(x)$ случайной величины X и вероятность того, что случайная величина X принимает значения из интервала $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

4.7. Функция плотности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0 \\ \frac{1}{2}+x & \text{при} \quad 0<x\le 1 \\ 0 & \text{при} \quad x>1 \end{cases}$$

Построить функцию распределения $F(x)$ случайной величины X.

4.8. Функция плотности случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<a \\ 1/(b-a) & \text{при} \quad a \le x \le b \\ 0 & \text{при} \quad x>b \end{cases}$$

Построить функцию распределения $F(x)$ случайной величины X и начертить ее график; найти $E(X)$, $D(X)$ и σ_X. Найти квантиль порядка 0,9 и квантиль порядка 0,99 этой случайной величины.

4.9. Пусть случайная величина X равна одному и тому же числу c на всем пространстве элементарных событий Ω. Найти для нее математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения.

4.10. Как изменится график функции плотности случайной величины X при

а) добавлении к случайной величине X числа 2;
б) вычитании из случайной величины X числа 3;
в) умножении случайной величины X на 0,5;
г) изменении знака случайной величины X на противоположный.

4.11. Пусть функция плотности случайной величины X четна относительно прямой $x=a$, т.е. для любого $x>0$ выполняется условие $f(x+a)=f(x-a)$, и пусть интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} u f(u) du$ конечен. Доказать, что $E(X)=a$.

Задание 5

Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Условная вероятность события A при условии события H:

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}.$$

Если события $H_1, H_2, \ldots, H_k$ попарно не пересекаются, а их объединение совпадает со всем пространством элементарных событий Ω, то

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(A|H_j)P(H_j) \quad \textbf{(формула полной вероятности) и}$$

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A|H_j)P(H_j)} \quad \textbf{(формула Байеса).}$$

5.1. В урне лежат 10 белых, 18 черных и 12 синих шаров. Случайным образом вынимаются 2 шара. Определить вероятность, что вынутые шары окажутся разного цвета, если известно, что среди вынутых шаров нет белого.

5.2. В урне первоначально находилось n шаров (m белых и $n-m$ красных). Затем 1 шар неизвестного цвета был извлечен. Из оставшихся в урне $n-1$ шаров вынимают случайным образом еще 1 шар. Какова вероятность, что вынутый шар окажется белым?

5.3. На предприятии работают 10 рабочих 6-го разряда, 15 рабочих 5-го разряда и 5 рабочих 4-го разряда. Вероятность того, что изделие, изготовленное рабочим, будет одобрено отделом технического контроля для рабочих 6-го, 5-го и 4-го разрядов равны соответственно 0,99; 0,95 и 0,9. Какой процент изделий, выпускаемых всеми тридцатью рабочими, одобряется отделом технического контроля?

5.4. На учениях два самолета одновременно атакуют цель. Известно, что первый самолет поражает цель с вероятностью 0,6, а второй – с вероятностью 0.4 . При разборе учений выяснилось, что цель была поражена только одним самолетом. Какова вероятность, что цель поразил первый самолет?

5.5. Предположим, что собран одинаковый урожай красных и зеленых яблок (т.е. вероятность выбрать красное яблоко равна вероятности выбрать зеленое яблоко), при этом 4% красных яблок и 1% зеленых – червивые. Случайным образом выбранное яблоко оказалось червивым. Какова вероятность, что это красное яблоко?

5.6. В больницу поступают 50% больных с заболеванием К. 30 % – с заболевантем L, 20% – с заболеванием М. Вероятность полного излечения: для К – 0,7, для L – 0,8, для М – 0,9. Событие А состоит в том, что больной выписался здоровым. Какова вероятность, что он был болен К?

5.7. Прибор может работать в двух режимах: нормальном и ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 80% всех случаев работы прибора, ненормальный – в 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме равна 0,1, в ненормальном – 0,7. Найти вероятность выхода прибора из строя за время t.

5.8. Имеются 2 урны: в первой a белых шаров и b черных, во второй c белых и d черных. Из первой урны перекладывают во вторую, не глядя, один шар. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

5.9. Имеются 3 урны: в первой из них a белых шаров и b черных, во второй c белых и d черных, в третьей f белых шаров (черных нет). Некто выбирает наугад с равной вероятностью одну из урн и вынимает из нее один шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятности того, что шар вынут из первой, второй и третьей урны.

5.10. Прибор состоит из 2 узлов. Работа каждого узла безусловно необходима для работы прибора в целом. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) первого узла равна p, второго q. Прибор испытывался в течении времени t, в результате чего было обнаружено, что он вышел из строя. Найти вероятность того, что отказал только первый узел.

5.11. Студент пришел на экзамен, зная только один билет. Как ему следует действовать, чтобы увеличить вероятность вытащить “свой” билет: идти отвечать первым или последним?

5.12. В первой урне лежат 5 белых шаров и 4 черных шара. Во второй урне лежат 3 белых шара и 7 черных шаров. Из первой урны во вторую наугад перекладывается один шар. Затем из второй урны в первую наугад перекладывается один шар. Найти распределение вероятностей случайной величины X, представляющей число белых шаров в первой урне после этих перекладываний.

Задание 6

Элементы комбинаторного анализа

Число комбинаций из n элементов по k без учета порядка в котором расположены k элементов $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

Число комбинаций из n элементов по k с учетом порядка в котором расположены k элементов $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Число перестановок из k элементов $P_k = k!$.

6.1. В урне 4 белых и 6 красных шаров. Какова вероятность того, что вынутые наугад два шара окажутся красными?

6.2. Ребенок, не умеющий читать, складывает рядом 4 кубика, на которых написаны буквы М, М, А, А. С какой вероятностью он получит слово МАМА?

6.3. В забеге участвуют 9 лошадей, причем считается, что никакие две лошади не могут прийти к финишу одновременно. Определить вероятность того, что между двумя заданными лошадьми финишируют ровно 3 лошади.

6.4. В партии из 60 изделий есть 4 бракованных. Из партии выбираются случайным образом 5 изделий. Найти вероятность того, что среди этих 5 изделий 2 будут бракованными.

6.5. Среди 30 лотерейных билетов 5 выигрышных. Два человека по очереди берут по одному билету. Найти вероятности следующих событий:

A = {первый человек взял выигрышный билет};
B = {второй человек взял выигрышный билет};
С = {оба человека взяли выигрышные билеты}.

6.6. Около вешалки лежат 8 различных пар перчаток. Из них случайно выбирается 6 перчаток. Найти вероятность того, что среди выбранных перчаток отсутствуют парные.

6.7. В урне лежат 4 белых и 8 красных шаров. Вынимаются наугад 2 шара. Какова вероятность того, что шары будут одноцветными?

6.8. Найти вероятность того, что взятое случайным образом целое положительное число окажется кратным 2, либо 3, либо тому и другому одновременно.

6.9. На шахматную доску из 64 клеток ставятся случайным образом 2 ладьи разного цвета. С какой вероятностью они будут "бить" друг друга?

6.10. Из 4 кубиков, на которых написаны числа 1, 2, 3, 4 последовательно берутся 2 кубика и кладутся рядом в том же порядке, в каком они были взяты. Какова вероятность, что получится число 21?

6.11. Из последовательности чисел 1, 2, ..., n наудачу выбираются 2 числа. Какова вероятность того, что одно из них меньше m, а другое больше m, где $1<m<n$ - произвольное целое число?

6.12. Человек забыл код на дверном замке и помнит только, что этот код состоит из двух различных четных цифр. Какова вероятность, что он с первого раза наберет код правильно?

6.13. Имеется n лотерейных билетов, из которых m выигрышных. Определить вероятность того, что среди случайным образом выбранных k билетов есть хотя бы один выигрышный.

6.14. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы года.

6.15. На конечной станции в вагон метро вошли 4 человека. Всего на этой линии 8 станций и известно, что каждый пассажир должен проехать хотя бы одну остановку, выходы любого пассажира на каждой из последующих остановок равновероятны. Определить вероятности следующих событий:
- все пассажиры выйдут на 5-ой станции;
- все пассажиры выйдут на одной и той же станции;
- все пассажиры выйдут на разных станциях.

6.16. Доброкачественная монета бросается 7 раз. Найти корреляцию между числом гербов, выпавших при первых 5 бросках, и числом решеток, выпавших при последних 4 бросках.

Задание 7

Формула Бернулли и приближенные формулы Муавра – Лапласа

Если вероятность успеха в одном испытании равна p, а вероятность неудачи равна $q=1-p$, то вероятность появления m успехов в n независимых испытаниях равна $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$ (формула Бернулли).

7.1. Доля бракованных изделий составляет 3% . Какова вероятность, что среди взятых случайным образом трех изделий будут два бракованных? Не будет ни одного бракованного?

7.2. Вероятность получения ответа при посылке некоторого сигнала равна 3/4. Каково наиболее вероятное число полученных ответов, если было послано 7 сигналов?.

7.3. Танк произвел 11 выстрелов по цели, вероятность попадания при каждом выстреле 0,4. Найти наиболее вероятное число попаданий в цель и вероятность этого числа попаданий.

7.4. Саженец яблони приживается с вероятностью 0,8. С какой вероятностью из 6 саженцев приживутся не менее 4?

7.5. В лотерее каждый пятый билет выигрывает. Какова вероятность, что из 300 билетов будет ровно 60 выигравших? Какова вероятность, что число выигравших билетов будет между 50 и 80?

7.6. Пусть вероятность того, что один кубический метр воды загрязнен сильнее нормы, составляет 1/7. Какова вероятность, что из 1000 м^3 воды сильнее нормы будет загрязнено больше 170 ?

7.7. Какова вероятность, что при бросании доброкачественной монеты 200 раз число выпадений "герба" будет лежать между 80 и 120 ? Будет ровно 100?

7.8. При сбое производственного процесса вероятность брака была оценена как 30% . Какова вероятность, что из произведенных 1200 изделий бракованных будет не больше, чем 350?

7.9. Сколько раз надо бросить монету, чтобы вероятность следующего события была равна полпроцента: доля выпавших гербов отличается от 0,5 больше, чем на 0,025?

7.10. Семена некоторого растения прорастают с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что из 2000 посаженных семян прорастет от 1580 до 1650.

7.11. Вероятность успеха в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что частота появления успеха отклонится по абсолютной величине от его вероятности не более, чем на 0,05.

7.12. На стрельбище было произведено 625 выстрелов по целям. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,9. Определить число b так, чтобы вероятность следующего события была равна 0,05: доля попаданий в цель отличается от 0,9 больше, чем на b.

7.13. Найти приближенно границы, в которых число выпадений шестерки при бросании игральной кости 70 раз заключено с вероятностью 0,9545.

Задание 8

Нормальное распределение случайной величины

Функция плотности стандартного нормального распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Функция плотности нормального распределения с математическим ожиданием μ и со стандартным отклонением σ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

8.1. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Что больше: $P\{-0,5 \le X \le -0,1\}$ или $P\{-2 \le X \le -1\}$? Чему равны эти вероятности?

8.2. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических (одного знака) погрешностей. Погрешности взвешивания распределены по нормальному закону со стандартным отклонением $\sigma = 20$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с погрешностью, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

8.3. Случайная величина X распределена по нормальному закону, $\mu = 0$. Найти вероятность того, что X примет значение между -3σ и 3σ, где $\sigma = \sqrt{D(X)}$ стандартное отклонение случайной величины X.

8.4. При упаковке коробок с конфетами средняя масса равна 503 г. Найти стандартное отклонение, если 5% коробок имеют массу меньше 500 г. Предполагается, что масса коробок распределена по нормальному закону.

8.5. Доказать, что если случайная величина X имеет нормальное распределение то случайная величина $Y = aX + b$ $(a \ne 0)$ также имеет нормальное распределение.

8.6. Контроль шариков для подшипников производится так: если шарик не проходит через отверстие диаметра d, но проходит через тверстие диаметра D $(D > d)$, то размер его считается приемлемым. Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то шарик бракуется. Определить вероятность брака в предположении, что диаметр шарика подчиняется нормальному закону с параметрами $\mu = 0,5\,(d + D)$, $\sigma = 0,25\,(D - d)$.

8.7. Случайная величина X нормальна с параметрами (0;1). Найти функцию распределения случайной величины $Y = X + |X|$.

Задание 9

Центральная предельная теорема. Использование нормального распределения для проверки гипотез

Пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют одинаковые функции распределения и независимы; $\mu = E(X_i)$, $\sigma^2 = D(X_i)$.

Пусть $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ и $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{(\sigma/\sqrt{n})}$.

Утверждение центральной предельной теоремы состоит в том, что при увеличении n функция распределения случайной величины Z сходится к функции распределения стандартной нормальной случайной величины.

9.1. Известны данные по урожайности пшеницы по 101 ферме. Среднее значение μ = 15 бушелей с акра, стандартное отклонение - 4 бушеля. Найти вероятность того, что в выборке из 25 ферм выборочное среднее будет меньше или равно 13,5 бушелей.

9.2. Из 2000 дилеров 40 % сообщили, что они собираются увеличить свои заказы на посудомоечные машины. Какова вероятность того, что в выборке из 400 дилеров выборочное отношение будет 46 % или выше?

9.3. 20% семей в некоторой местности выписывают журнал К. Какова вероятность того, что в выборке из n=225 семей выборочное отношение будет 0,16 (16%) или меньше?

9.4. В прошлом году средняя оценка на экзамене по стобальной шкале у студентов была 65 баллов со стандартным отклонением $\sigma = 16$. В этом году был применен новый метод обучения и обнаружено, что в выборке из 64 студентов средняя оценка составила 69 баллов. Существует ли здесь значимое различие?

9.5. В бутылке должно находиться 100 мл жидкости. Из большой партии было проверено 144 бутылки и обнаружено, что в среднем в бутылке 99 мл. Предполагая, что для одной бутылки стандартное отклонение $\sigma = 4$ мл, определить, является ли выявленное отклонение значимым?

9.6. Имеется группа из N=90 работников со следующим распределением заработков:

Заработок, X (долл.	400	500	600	700	800	900	1000
Кол-во человек	3	12	18	24	18	12	3

Найти вероятность того, что в наугад сделанной выборке из n=16 человек средний заработок будет больше или равен 770 долларам. В качестве дисперсии случайной величины X использовать оценку для дисперсии.

9.7. Компания имеет 160 машинисток, скорость печатания которых (число ударов в минуту) показана в следующей таблице:

Скорость печатания,	45	50	55	60	65	70	75
Число машинисток	10	20	30	40	30	20	10

То есть средняя скорость печатания равна 60. Компания отправила всех машинисток на курсы, после чего было решено произвести статистическую проверку результатов, чтобы узнать, принесла ли учеба на курсах пользу. Была проверена скорость печатания у 16 машинисток, и обнаружено, что средняя скорость равна 66,4. Можно ли на основании этой проверки сделать вывод, что после учебы на курсах средняя скорость печатания возросла, или полученное различие носит случайный характер? В качестве дисперсии случайной величины X использовать оценку для дисперсии.

9.8. Процесс упаковки кофе считается нормальным, если в коробку помещается 6 унций кофе со стандартным отклонением 0,2 унции. Проведена выборка из 100 коробок, и обнаружено, что средний вес коробки 6,1 унции. Является ли процесс упаковки нормальным? А если было проверено 4 коробки и получен тот же результат?

9.9. Фабрика, производящая болты, считает, что процесс идет нормально, если средний диаметр болта 10 *мм* и стандартное отклонение 0,2 *мм*. Если процесс не удовлетворяет этим условиям, он должен быть остановлен. Каждый час проверяется 16 болтов. Уровень значимости при проверке гипотезы о том, что диаметр болта составляет в среднем *10 мм* принимается равным 0,05. В каких пределах должно находиться выборочное среднее?

Задание 10

Ошибки первого и второго рода

Ошибка первого рода - это ошибка, которая возникает, когда в действительности верна основная гипотеза, а решение принимается исходя из того, что верна альтернативная гипотеза.

Ошибка второго рода - это ошибка, которая возникает, когда в действительности верна альтернативная гипотеза, а решение принимается исходя из того, что верна основная гипотеза.

Вероятность ошибки первого рода обычно обозначается α, вероятность ошибки второго рода β. Когда основная и альтернативная гипотезы связаны с неизвестным математическим ожиданием μ некоторой случайной величины X, для оценки α и β может быть использована центральная предельная теорема.

10.1. Компания по производству телевизоров решает, делать корпус из пластика или из дерева. По каким-то причинам компания не заинтересована использовать пластик. Если не больше 50 % покупателей предпочитают пластик, то корпуса будут делать из дерева, если больше 50 % - из пластика. Но ошибкой первого рода считается использовать пластик, когда в действительности доля покупателей, предпочитающих пластик, не более 50%. Какую рекомендацию следует дать фирме, если размер выборки n = 49 покупателей, относительно которых известно, предпочитают они пластик или нет, а допустимый уровень риска (то есть вероятность ошибки первого рода) α равен 0,05 ?

10.2. Решить задачу 10.1 в случае, если компания заинтересована использовать пластик.

10.3. Фирма, занимающаяся продажей телевизоров, должна принять решение, проводить ли рекламную компанию новой модели в определенном регионе. Фирма считает, что проводить рекламную компанию стоит, если средний месячный доход семьи в регионе 400 долларов или больше, и не стоит, если 370 долларов или меньше. Каким должен быть размер выборки n, чтобы вероятность ошибки 1-го рода (в данном случае не начинать рекламную компанию при среднем доходе 400 долларов или больше) была не больше 2,5 % , а вероятность ошибки 2-го рода - не более 5 % ? Каким должен быть критерий? Известно, что стандартное отклонение случайной величины, представляющей месячный доход семьи в данном регионе, равно 50 долларам?

10.4. Учреждение собирается произвести закупку оборудования в том случае, если процент брака не выше 5%. Проверена выборка размера n=100.

Вероятность ошибки 1-го рода (в данном случае не закупать оборудование, когда процент брака не выше 5%) должна быть не больше 5%. Каким должен быть критерий для принятия решения?

10.5. Некоторая дама утверждает, что она обладает особыми способностями и когда ей дают чай с молоком, она безошибочно может определить, что наливали в чашку раньше, чай или молоко. Для проверки того, правду ли говорит дама, было решено провести следующий опыт. Даме предлагают 8 чашек чая с молоком, из которых в 4 чашки раньше налили чай, а в 4 чашки раньше налили молоко. Даме известно, что ей предложено 4 таких и 4 таких чашки, но не известно, какие это чашки.

Основная гипотеза: дама не обладает особыми способностями.

Альтернативная гипотеза: дама обладает особыми способностями.

Статистический критерий: принимается основная гипотеза, если дама ошиблась в отношении хотя бы одной чашки, и альтернативная, если дама определила все чашки верно.

Определить вероятности ошибок первого и второго рода. Считается, что дама не обладает особыми способностями, если она ошиблась хоть раз в жизни.

Какой будет вероятность ошибки первого рода, если предложить даме не 8 чашек, а 2, из которых в одну раньше наливали чай, а в другую молоко?

10.6. Компания закупает тросы, если они выдерживают рывок 200 фунтов и не закупает, если меньше. Для проверки качества было произведено испытание 25 тросов. Статистика просят найти критерий при условии, что вероятность ошибки первого рода α не должна превышать 0,05. Стандартное отклонение для одного троса σ=20 фунтов. Найти решение в двух следующих ситуациях: а) компания заинтересована в том, чтобы не упустить доброкачественные тросы, то есть ошибкой первого рода считается отказ от покупки, когда тросы доброкачественны; б) компания заинтересована в том, чтобы не купить недоброкачественные тросы, то есть ошибкой первого рода считается покупка недоброкачественных тросов.

Задание 11

Соотношение между погрешностью, риском и размером выборки. Доверительный интервал. Оценка параметров

Пусть производится оценка некоторой числовой характеристики случайной величины. Изучается связь значения погрешности, вероятности того, что погрешность будет больше этого значения и размера выборки. Вместо значения погрешности может рассматриваться длина доверительного интервала.

При изучении математического ожидания μ нормальной случайной величины X с известной дисперсией σ^2 используется интервал $(\overline{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, называемый доверительным интервалом. Здесь n - количество наблюдений, квантиль z определяется из условия $\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_z^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx$. Математическое ожидание случайной величины X принадлежит этому интервалу с вероятностью 1 - α. Т.е. вероятность того, что при определении математического ожидания μ при помощи $\overline{X}$ будет допущена погрешность $b = z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, или большая, равна α.

Несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии имеют вид: $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

11.1. Компания, торгующая зубной пастой, хочет оценить долю людей, предпочитающих данную зубную пасту. Погрешность не должна превышать 2 % с вероятностью 0,0456. Каким должен быть размер выборки n?

11.2. Решить задачу 1, если погрешность не должна превышать 5 % с вероятностью 0,0164 .

11.3. Кафе хочет оценить среднюю сумму, которую посетитель тратит на ланч. Взята выборка из $n=36$ посетителей и обнаружено, что $\overline{X} = 3,60$ долл. Пусть нам известно, что стандартное отклонение для одного посетителя $\sigma = 72$ центов. Найти 95% -й доверительный интервал для $E(X) = \mu$.

11.4. Пусть X - нормально распределенная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием μ, которое надо найти, и с известным стандартным отклонением $\sigma = 5$. По выборке длины $n = 25$ найдено выборочное среднее $\overline{X} = 14$. Найти 95 % - й доверительный интервал для μ.

11.5. Каждая коробка сахара содержит μ грамм. Стандартное отклонение $\sigma = 4$ г. Из генеральной совокупности взята выборка из $n=16$ коробок. Каков риск, что ошибка при определении среднего будет больше, чем 2 грамма? Каким должен быть размер выборки n, чтобы вероятность (риск) получения ошибки в 1 грамм была больше, или равна 0,0456 ?

11.6. Из генеральной совокупности извлечена выборка размера n=50 и получены следующие результаты:

значения, X_i	2	5	7	10
частоты, n_i	16	12	8	14

Найти оценку для математического ожидания.

11.7. Из вагона сахара было взвешено 5 мешков и получены следующие результаты: 92 кг, 94 кг, 103 кг, 105 кг, 106 кг. Найти оценки для математического ожидания и для дисперсии веса мешка.

11.8. При 7 независимых измерениях одной и той же величины были получены следующие результаты: 12,5; 12,8; 11,6; 11,9; 12,0; 12,1; 11,8. Получить несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

Задание 12[1]

Применение χ^2 - распределения

При проверке гипотез о соответствии наблюдений предполагаемому распределению вероятностей случайной величины

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}.$$

При проверке гипотез о независимости признаков и гипотез об однородности

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(\nu_{ij} - \frac{\lambda_i \mu_j}{n})^2}{\lambda_i \mu_j}.$$

12.1. В выборке из 500 часов, выставленных в витринах часовых магазинов, показания оказались распределены следующим образом:

Положение стрелки	12-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12
Количество часов с с таким положением стрелки	36	47	41	47	49	45	32	37	40	41	37	48

Противоречат ли эти наблюдения гипотезе, что в любом из 12 положений стрелка часов находится с вероятностью 1/12 ?

12.2. При 4040 бросаниях монеты было получено 2048 "гербов" и 1992 "решеток". Совместимо ли это с гипотезой о доброкачественности монеты?

12.3. В следующей таблице приведены данные, полученные в результате опросов $n=100$ американских семей относительно их ежемесячных расходов:

[1] Используемые обозначения этого и следующего заданий определены в главах 5-7 учебного пособия: Шведов А.С. "Теория вероятностей и математическая статистика", М., Изд-во ВШЭ, 1995.

< 1000 долл.	13	7
1000 – 1999 долл.	15	12
2000 – 2999 долл.	18	10
3000 – 3999 долл.	18	11
4000 – 4999 долл.	15	12
5000 – 7499 долл.	14	26
≥7500 долл.	7	22

Данные второго столбца относятся к 1951 г., а данные третьего столбца - к 1959 г.. Отличается ли распределение по расходам в 1959 г. от распределения 1951 г. значимо или полученные расхождения могут носить случайный характер?

12.4. По шведской переписи населения 1936 г. была сделана выборка из n = 25 263 супружеских пар, вступивших в брак в течение пяти последних лет. По следующей таблице определить, являются ли доходы семьи (в тысячах крон) и количество детей независимыми признаками.

Кол-во детей \ Доходы	0-1	1-2	2-3	>3	Σ
0	2 161	3 577	2 184	1 636	9 558
1	2 755	5 081	2 222	1 052	11 110
2	936	1 753	640	306	3 635
3	225	419	96	38	778
≥4	39	98	31	14	182
Σ	6 116	10 928	5 173	3 016	25 263

12.5. В следующей таблице приведено распределение цвета волос на голове и цвета бровей у 46 542 шведских призывников (данные 1926 г.). Проверить гипотезу о независимости признаков.

цвет бровей \ цвет волос	светлые или рыжие	темные	Σ
светлые или рыжие	30 472	3 238	33 710
темные	3 364	9 468	12 832
Σ	33 836	12 706	46 542

12.6. В таблице приведено распределение пола детей, родившихся в Швеции в 1935 г. Проверить гипотезу об однородности, то есть гипотезу о том, что доля рождающихся мальчиков не зависит от месяца.

\ Месяц Пол ребен	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
Мальчики	3 743	3 550	4 017	4 173	4 117	3 944	3 964	3 797	3 712	3 512	3 392	3 761	45 682
Девочки	3 537	3 407	3 866	3 711	3 775	3 665	3 621	3 596	3 491	3 391	3 160	3 371	42 591
Σ	7 280	6 957	7 883	7 884	7 892	7 609	7 585	7 393	7 203	6 903	6 552	7 132	88 273

12.7. По приведенным данным определить, связано ли качество потребляемого супа с доходами человека. Гипотеза о независимости должна быть проверена, так как данные дают парадоксальный результат: люди с высокими доходами предпочитают плохой суп, а с низкими хороший.

	хороший суп	плохой суп	$\sum$
высокие доходы	40	60	100
низкие доходы	110	90	200
$\sum$	150	150	300

12.8. Есть ли значимое различие в том, какие цвета летней одежды предпочитают мужчины и женщины? Результаты опроса:

	мужчины	женщины	$\sum$
Розовый	100	200	300
Белый	200	100	300
Голубой	300	100	400
$\sum$	600	400	1000

12.9. В таблице приведены оценки, полученные на экзамене студентами двух бизнес колледжей. Можно ли считать, что уровни знаний студентов одинаковы?

	1 - ый колледж	2 - ой колледж	$\sum$
оценка A	50	50	100
оценка B	100	50	150
оценка C	150	200	350
оценка D	100	150	250
оценка E	100	50	150
$\sum$	500	500	1000

Задание 13

Применение *t*-распределения и *F*-распределения

При проверке гипотез о среднем значении нормально распределенной случайной величины с неизвестной дисперсией рассматривается случайная величина $t = \dfrac{\overline{X} - \mu}{(\hat{\sigma}/\sqrt{n})}$, **имеющая *t*-распределение с *(n-1)* степенями свободы.**

При проверке гипотез о равенстве средних значений двух нормально распределенных случайных величин рассматривается случайная величина $t = \sqrt{\dfrac{mn(m+n-2)}{m+n}}\dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{mS_X^2 + nS_Y^2}}$, **имеющая *t*-распределение с *(m+n-2)* степенями свободы.**

При проверке гипотез о равенстве дисперсий двух нормально распределенных случайных величин рассматривается случайная величина $F = \hat{\sigma}_X^2 / \hat{\sigma}_Y^2$, **имеющая *F*-распределение со степенями свободы *(m-1, n-1)*.**

13.1. Новая программа обучения машинисток предполагает увеличение скорости печатания на 10 слов в минуту. Выборка из 16 машинисток, прошедших обучение, показала, что скорость печатания возросла на 5 слов в минуту: $\overline{X} = 5$, а для стандартного отклонения получена оценка $\hat{\sigma} = 8$. Значат ли эти данные, что программа не достигает поставленной цели? Проверку гипотезы об увеличении скорости печатания в среднем на 10 слов в минуту провести при уровне значимости 0,05.

13.2. Решить задачу 1 в случае, если программа предполагает увеличение скорости печатания на 7 слов в минуту.

13.3. На фабрике происходит упаковка сахара в коробки. Каждая коробка должна содержать 10 унций. Периодически берется выборка из 9 коробок для проверки среднего веса коробки сахара. Отклонение выборочного среднего от 10 унций, при котором процесс должен быть остановлен, определяется из следующего условия: вероятность того, что нормально идущий процесс будет ошибочно остановлен не должна превышать 10%. По сделанной выборке было получено $\overline{X} = 10{,}6$, $\hat{\sigma} = 0{,}45$. Следует ли останавливать процесс?

13.4. В первом и во втором месяце предлагались следующие процентные ставки по кредитам:

1 -ый месяц

процентные ставки	3,4	3,5	3,7	3,9
частоты	2	3	4	1

2 -ой месяц

процентные ставки	3,2	3,4	3,6
частоты	2	2	8

Считается, что случайные величины X_1 и X_2, соответствующие процентным ставкам в первый и во второй месяц, распределены нормально и имеют одинаковые дисперсии. Можно ли на основании этих выборок сделать вывод, что процентная ставка понизилась с риском совершить ошибку в 1% или для такого вывода требуются дополнительные наблюдения?

13.5. Даны значения двух независимых нормально распределенных случайных величин X_1 и X_2

X_1	60	60	70	80	80		
X_2	40	40	40	50	60	60	60

Противоречат ли эти данные гипотезе, что дисперсии случайных величин X_1 и X_2 равны? В случае, если дисперсии можно считать равными, определить, противоречат ли эти данные гипотезе, что математические ожидания этих случайных величин равны?

13.6. Сравнивается урожайность хлопка на 2-х соседних полях за последние 10 лет. Получены средние : $\overline{X}_1 = 750$ фунтов с акра, $\overline{X}_2 = 680$

фунтов с акра; $S_1^2 = 20\ 000$; $S_2^2 = 14\ 000$. Следует ли от отвергать гипотезу о равенстве дисперсий при 5 % - ом уровнем значимости?

13.7. Есть предположение, что флуктуации в спросе на труд юношей больше, чем в спросе на труд женатых мужчин. Проверить это предположение, воспользовавшись следующей таблицей:

% безработных в США для двух групп населения

	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961
женатые мужчины	3,4	4,6	1,5	1,4	1,7	4,0	2,6	2,3	2,8	5,1	3,6	3,7	4,6
юноши 14 -19 лет	12,2	11,3	7,7	8,0	7,1	11,4	10,2	10.4	10,8	14.4	13.2	13,6	15.2

Задание 14

Распределение Пуассона

Случайная величина *X*, принимающая неотрицательные целые значения, имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если вероятность того, что *X* принимает значение *k* равна $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Для случайной величины *X*, имеющей распределение Пуассона с параметром λ $E(X)=\lambda$, поэтому параметр λ может оцениваться по имеющимся наблюдениям так же, как математическое ожидание: $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$.

14.1. Космический корабль, движущийся по орбите вокруг Земли в течение 20 суток случайным образом сталкивается с метеоритами. Метеориты, сталкивающиеся с космическим кораблем образуют пуассоновский поток с параметром λ (метеоритов в сутки). Метеорит, попавший в корабль, пробивает его оболочку с вероятностью p. Метеорит, пробивший оболочку, с вероятностью q выводит из строя системы жизнеобеспечения космического корабля. Найти вероятность того, что за время полета корабля будет пробита оболочка, но системы жизнеобеспечения будут действовать.

14.2. Пусть число звезд в объеме v некоторого звездного скопления есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром λv. Требуется найти закон распределения расстояния от произвольной точки пространства до ближайшей звезды.

14.3. Самолет производит вынужденную посадку на поле с валунами. Число валунов на площади s есть случайная величина, распределенная по

закону Пуассона с параметром λs. Размах крыльев самолета a, длина пробега b. Определить вероятность того, что самолет произведет благополучную посадку, то есть не заденет при посадке ни одного валуна.

14.4. При производстве доля бракованных деталей составляет 1%. Какова вероятность, что в выборке из 150 деталей будет два бракованных?

14.5. В городе стоит гарнизон из 600 солдат. Каждый из солдат один раз в неделю в произвольное время приходит в парикмахерскую. Какова вероятность, что в течение некоторого фиксированного часа в парикмахерскую придут ровно 4 солдата, если парикмахерская работает 24 часа в сутки?

14.6. Страховая компания располагает информацией, что в некотором городе в серьезную аварию за год попадает один автомобиль из 700. Пусть в городе имеется 2100 автомобилей. Какова вероятность, что в серьезную аварию в течение года попадет ровно 1 автомобиль?

14.7. На фабрике, где работает 100 токарей в течение 10 дней собирались сведения о числе бракованных деталей. N_k - число человеко-дней, когда было произведено k бракованных деталей.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N_k	50	150	220	230	170	100	50	20	10	0

Процесс выпуска бракованных деталей можно считать пуассоновским, так как вероятность выпуска бракованной детали за небольшой промежуток времени приблизительно пропорциональна длине этого промежутка. Найти параметр этого пуассоновского процесса.

ОТВЕТЫ

1.1. *B* ; *A*. **1.2.** Из целых чисел, делящихся на 700. **1.5.** *A*=*B*.
1.11. Да. **1.12.** 10.

2.1. *B*. **2.2.** В том и только в том, когда одно из них пусто.

2.4. $D = (A_1 \cup A_2) \cap \big((B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_3) \cup (B_2 \cap B_3)\big)$;
$\overline{D} = (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) \cup \big((\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2) \cap (\overline{B}_1 \cup \overline{B}_3) \cap (\overline{B}_2 \cup \overline{B}_3)\big)$.

2.5. $D = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) \cap (C_1 \cup C_2)$;
$\overline{D} = \overline{A} \cup (\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3 \cap \overline{B}_4) \cup (\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2)$.

2.6. Зависимы. **2.8.** $\frac{107}{295}$. **2.9.** 0,3 ; 0,7 . **2.10.** 1/6 ; 1/3 .
2.11. 1/6 . **2.12.** 1/2 . **2.13.** 1/4 ; 1/2 . **2.14.** 3/8 . **2.15.** 30 .

3.1. -0,3 ; 2,01 . **3.2.** 112 . **3.3.** *p*/(1-*p*) . **3.4.** 4,5 ; 7/12 .
3.6. 3,5 ; 35/12 ; 3,5*n* ; 35*n*/12 .
3.10. Умножится на c; умножится на c^2; умножится на $|c|$.

3.11. Прибавится слагаемое c; не изменится; не изменится.

3.12. 10; 32. **3.15.** 0,001725 . **3.16.** 0,015625 .

3.17. Добавление ценной бумаги В. (Добавление ценной бумаги А увеличит общую дисперсию портфеля на $\frac{V+2(99(1/2)V)}{10000}=0{,}01V$. Добавление ценной бумаги В увеличит общую дисперсию портфеля на $\frac{25V}{10000}=0{,}0025V$, то есть во втором случае портфель будет более надежным.)

3.18. $E(X)=-0{,}2$, $E(Y)=0{,}1$, $D(X)=0.96$, $D(Y)=0{,}69$, $Cov(X,Y)=0{,}32$.

4.1. $E(X)=1{,}2$; $D(X)=0{,}48$.

4.4. $P=0{,}75$; $f(x)=\begin{cases}0 & \text{п ри } x<1\\ 2(x-1) & \text{п ри } 1\le x\le 2\\ 1 & \text{п ри } x>2\end{cases}$.

4.5. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$; $E(X)=0$. **4.6.** $A=1/2$; $B=1/\pi$; $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$; $P=2/3$ **4.8.** $E(X)=(a+b)/2$; $D(X)=(b-a)^2/12$; $\sigma_X=\frac{b-a}{\sqrt{12}}$; квантиль порядка 0,9 равна $a+0{,}9(b-a)$, квантиль порядка 0,99 равна $a+0{,}99(b-a)$. **4.9.** $E(X)=c$; $D(X)=0$. **4.10.** а) сдвинется вправо на 2; б) сдвинется влево на 3; в) сожмется в 2 раза относительно начала координат в направлении оси абсцисс и растянется в 2 раза относительно начала координат в направлении оси ординат; г) зеркально отразится относительно оси ординат.

5.1. А – вынуты черный и синий шары;
Н – среди вынутых шаров нет белого;
$P(A)=P(A\cap H)=\frac{18\cdot 12}{C_{40}^2}$; $P(H)=\frac{C_{30}^2}{C_{40}^2}$; $P(A\,|\,H)=\frac{72}{145}$.

5.2. H_1 – первоначально был извлечен белый шар;
H_2 – первоначально был извлечен красный шар;
А – в последний раз вынут белый шар;
$P(A)=P(A\,|\,H_1)\,P(H_1)+P(A\,|\,H_2)\,P(H_2)=\frac{m-1}{n-1}\cdot\frac{m}{n}+\frac{m}{n-1}\cdot\frac{n-m}{n}=\frac{m}{n}$.

5.3. 0,955 . **5.4.** 9/13 (H_1 – в цель попал только первый самолет, H_2 – в цель попал только второй самолет, H_3 – в цель попали оба самолета, H_4 – в цель не попал ни один самолет). **5.5.** 0,8 . **5.6.** 35/77 . **5.7.** 0,22 .

5.8. $\frac{a}{a+b}\cdot\frac{c+1}{c+d+1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{c}{c+d+1}$.

5.9. $\frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1}$; $\frac{\frac{c}{c+d}}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1}$; $\frac{1}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1}$.

5.10. $\frac{(1-p)q}{1-pq}$. **5.11.** Вероятность вытащить нужный билет одна и та же.

5.12. $P(X=4)=\frac{35}{99}$, $P(X=5)=\frac{52}{99}$, $P(X=6)=\frac{12}{99}$.

6.1. 1/3 . **6.2.** 1/6 . **6.3.** 5 / 36 . **6.4.** 0,03 . **6.5.** 1/6; 1/6; 2 / 87.

6.6. $\frac{C_8^6\cdot 2^6}{C_{16}^6}=\frac{32}{143}$. **6.7.** 34 / 66 . **6.8.** 2/3 . **6.9.** 2/9 . **6.10.** 1/12 .

6.11. $\frac{C_{m-1}^1\cdot C_{n-m}^1}{C_n^2}=\frac{2(m-1)(n-m)}{n(n-1)}$. **6.12.** 1/20 . **6.13.** $1-\frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$.

6.14. 0,000054 . **6.15.** $\left(\frac{1}{7}\right)^4$; $\left(\frac{1}{7}\right)^3$; $\frac{120}{343}$. **6.16.** $-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

7.1. 0,0026 ; 0,91 . **7.2.** 5 или 6 . **7.3.** 4 . **7.4.** 0,9 . **7.5.** 0,058 ; 0,923. **7.6.** 0,0074 . **7.7.** 0,9953 ; 0,056 . **7.8.** 0,27 . **7.9.** 3152 . **7.10.** 0,86 . **7.11.** 0,9995 . **7.12.** 0,024 . **7.13.** $6\le m\le 17$.

8.1. 0,1516 ; 0,1359 . **8.2.** 0,3829 . **8.3.** 0,9973 . **8.4.** 1,82 .

8.5. Указание: $P(Y\le x)=P(X\le\frac{x-b}{a})=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy$.

8.6. 0,0455. **8.7.** $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x/2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt. & \end{cases}$

9.1. 0,016 . **9.2.** 0,0035 . **9.3.** 0,072 .

9.4. Если средний уровень знаний при новом методе обучения у студентов остался отвечающим оценке 65, то вероятность получить в выборке из 64 студентов средний балл 69 или больше составляет около 0,02 . Поэтому при уровне значимости, например, 0,05 гипотеза о том, что новый метод не дает лучших результатов должна быть отброшена, а при уровне значимости, например, 0,01 отбрасывать данную гипотезу нет оснований.

9.5. Даже при уровне значимости 0,01 гипотеза о том, что в среднем в данной партии каждая бутылка содержит 100 мл жидкости должна быть отброшена.
9.6. 0,017 . **9.7.** Если средняя скорость печатания для всех машинисток осталась 62,5, то вероятность получить в выборке из 16 машинисток среднюю скорость 66,5 или больше составляет около 0,02. Поэтому при уровне значимости, например, 0,05 гипотеза о том, что учеба на курсах не принесла пользу, должна быть отброшена, а при уровне значимости, например, 0,01 отбрасывать данную гипотезу нет оснований.
9.8. При условии, что проведена выборка из 100 коробок процесс упаковки ненормален. Если проверено 4 коробки и получен тот же результат, то отвергать гипотезу о нормальности процесса упаковки нет оснований.
9.9. Значение $\bar{X}$ должно лежать между 9,902 и 10,098 .

10.1. Рекомендация должна быть следующей: если 31 покупатель или больше предпочитают пластик, то использовать пластик, в противном случае – дерево.
10.2. Рекомендация должна быть следующей: если 18 покупателей или меньше предпочитают пластик, то использовать дерево, в противном случае – пластик.
10.3. Размер выборки n=36. Если среднее по выборке больше 383,6 долл. – начинать рекламную компанию, если меньше – не начинать.
10.4. Если в выборке 8 бракованных изделий или меньше – закупать оборудование. Если 9 или больше – не закупать.
10.5. При 8 чашках вероятность ошибки первого рода 1/70, вероятность ошибки второго рода 0. При 2 чашках вероятность ошибки первого рода 1/2, вероятность ошибки второго рода 0.
10.6. а) закупать тросы, если среднее по 25 тросам равно 193,42 фунта или больше и не закупать в противном случае; б) закупать тросы, если среднее по 25 тросам равно 206,58 фунта или больше и не закупать в противном случае.

11.1. 2500 человек. **11.2.** 656 человек. **11.3.** (3 долл. 36 центов, 3 долл. 84 цента). **11.4.** (12,04 , 15,96). **11.5.** 0,0456 ; 64 . **11.6.** 5,76 . **11.7.** $\bar{X}$ =100; S^2 =34; $\hat{\sigma}^2$=42,5 . **11.8.** $\bar{X}$=12,1 ; $\hat{\sigma}^2$= 0,173.

12.1. Не противоречат. **12.2.** Совместимо. **12.3.** Отличается значимо. **12.4.** Гипотеза о независимости доходов семьи и количества детей должна быть отвергнута. **12.5.** Гипотеза о независимости признаков должна быть отвергнута. **12.6.** Данные совместимы с гипотезой об однородности. **12.7.** Гипотеза о независимости должна быть отвергнута. **12.8.** Есть. **12.9.** Гипотеза о том, что уровень знаний не зависит от колледжа, должна быть отвергнута.

13.1. Гипотеза должна быть отвергнута; программа не достигает поставленной цели. **13.2.** Отвергать гипотезу об увеличении скорости печатания в среднем на 10 слов в минуту нет оснований. **13.3.** Процесс следует остановить. **13.4.** Отвергать гипотезу о равенстве процентных ставок на основании имеющихся данных нет оснований, дополнительные наблюдения требуются. **13.5.** Отвергать гипотезу о равенстве дисперсий нет оснований. Гипотеза о равенстве средних значений должна быть отвергнута даже при уровне значимости 0,01. **13.6.** Не следует. **13.7.** При уровне значимости 0,05 гипотеза о равенстве дисперсий должна быть отвергнута. При уровне значимости 0,01 отвергать гипотезу о равенстве дисперсий нет оснований.

14.1. $e^{-20\lambda pq}-e^{-20\lambda p}$. **14.2.** $1-e^{-\lambda\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}$. **14.3.** $e^{-\lambda\cdot ab}$. **14.4.** 0,2510 . **14.5.** 0,1906 . **14.6.** 0,1494 . **14.7.** 2,98 .

Содержание